Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет
ім. Олеся Гончара

Кафедра математичного аналізу і теорії функцій

ПРАКТИКУМ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ЗА ТЕМОЮ «ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ»

Київ

Діасофт

2018

Наведено основні методи розв’язання задач із теорії функції комплексної змінної. Перша частина видання являє собою опорний конспект, який складається з основних формул і понять. Головну увагу приділено формуванню практичних навичок розв’язання задач. Матеріал систематизовано й поділено на частини таким чином, щоб можна було легко знайти необхідну формулу або визначення. У другій частині вміщено варіанти завдань для індивідуального виконання.

Для студентів ДНУ, які вивчають курси «Вища математика» і «Методи математичної фізики».

Рекомендовано до друку вченою радою
механіко-математичного факультету (протокол № 6 від 22 січня 2018 р.)

Рецензенти:

А. В. Тушев, доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри геометрії і алгебри Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара

Т. М. Семиренко, кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої математики Дніпровського державного агроекономічного університету

Практикум з вищої математики за темою
«Теорія функцій комплексної змінної»

Укладачі: канд. фіз.-мат. наук, доц. М. Б. Вакарчук
канд. фіз.-мат. наук, доц. О. О. Руденко

Головний редактор С. М. Козлов
Техредактор Ю. І. Артеменко

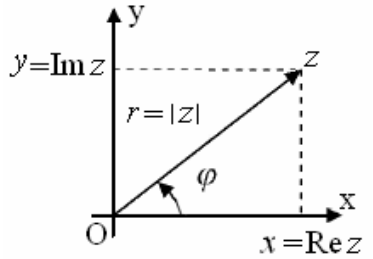
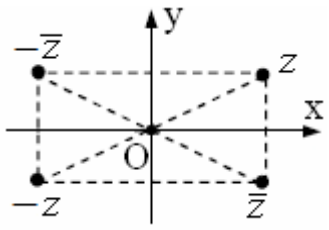
Підписано до друку 05.02.2018 р. Формат 60×84/16. Папір друкарський.
Друк плоский. Ум. друк. арк. 1. Ум. фарбовідб. 1.
Обл.-вид. арк. 0,8. Тираж 100 пр. Зам. 15.

АТ «Книга», вул. Артема, 25, м. Київ.
Свідоцтво про держреєстрацію 24729912 від 11.03.1997 р.

© Вакарчук М. Б., Руденко О. О., 2018

1. Комплексні числа й дії над ними

1.1. Поняття комплексного числа

Основне поняття	Означення
Комплексне число	$z = x + iy$ $x = \operatorname{Re} z$ – дійсна частина z, $y = \operatorname{Im} z$ – уявна частина z, i – уявна одиниця ($i^2 = -1$)
Рівність комплексних чисел	$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 ; y_1 = y_2$
Модуль комплексного числа	$r = \lvert z \rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$
Комплексно-спряжене число	$\bar{z} = x - iy$
Зображення комплексного числа	 
Головне значення аргументу	$\varphi = \arg z$, де $-\pi < \arg z \le \pi$ $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$ $\varphi = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, \ x > 0, \\ \arctan\dfrac{y}{x} + \pi, \ x < 0, y > 0, \\ \arctan\dfrac{y}{x} - \pi, \ x < 0, y < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, \ x = 0, y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, \ x = 0, y < 0 \end{cases}$
Множина значень аргументу	$\operatorname{Arg} z = \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$
Формула Ейлера	$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

1.2. Форми запису і дії над комплексними числами

Форма / Операція	Алгебраїчна $z_1 = x_1 + iy_1$ $z_2 = x_2 + iy_2$	Тригонометрична $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$	Показникова $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ $z_1 = r_2 e^{i\varphi_2}$
Додавання	$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$	—	—
Множення	$z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$	$z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$	$z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
Ділення	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$
Піднесення до степеня	—	$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$	$z^n = r^n e^{in\varphi}$
Добування кореня	—	$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n})$, $k = 0, 1, 2, ..., n-1$	$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\exp(i\frac{\varphi + 2\pi k}{n})$, $k = 0, 1, 2, ..., n-1$

2. Функції комплексної змінної

2.1. Деякі елементарні функції комплексної змінної

Назва	Означення
Показникова функція	$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$
Тригонометричні функції	$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$, $\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$

Закінчення таблиці

Гіперболічні функції	$\operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$, $\operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$ $\operatorname{th} z = \operatorname{sh} z / \operatorname{ch} z$, $\operatorname{cth} z = \operatorname{ch} z / \operatorname{sh} z$
Логарифмічна функція	$\operatorname{Ln} z = \ln\lvert z\rvert + i(\arg z + 2\pi k),\ k \in \mathbf{Z}$
Головне значення логарифма	$\ln z = \ln\lvert z\rvert + i \arg z$
Обернені тригонометричні функції	$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$, $\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$, $\operatorname{Arctg} z = \dfrac{i}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{i+z}{i-z}$, $\operatorname{Arcctg} z = \dfrac{i}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{i+z}{i-z}$

2.2. Диференціювання функцій комплексної змінної

Основне поняття	Означення
Похідна функції $f(z)$ у точці z_0	$f'(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$
Область	Зв'язна відкрита множина точок комплексної площини
Однозв'язна та багатозв'язна області	Область D, у якої внутрішність довільної замкненої кривої (без точок самоперетину), що лежить у D, цілком належить області D, називають однозв'язною. Якщо ця умова не виконується, область багатозв'язна
Аналітична функція	Функція аналітична в точці, якщо вона диференційовна в цій точці й деякому її околі. Функція аналітична в області, якщо вона диференційовна в кожній точці цієї області

Критерій диференційовності

Умови Коші – Рімана існування похідної функції $f(z) + u(x, y) = iv(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Формули для похідної диференційовної функції

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

2.3. Інтегрування функцій комплексної змінної

$$\int_L f(z)dz = \lim_{\max|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k \ .$$

Властивість	Умова	
Зв'язок із криволінійним інтегралом 2-го роду	$\int_L f(z)dz = \int_L u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_L v(x,y)dx + u(x,y)dy$	
Зв'язок із визначеним інтегралом	$L: z = \sigma(t), t \in [\alpha,\beta]$ $\int_L f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(\sigma(t))\sigma'(t)\,dt$	
Формула Ньютона–Лейбніца	Якщо $f(z)$ аналітична в області D, F − первинна для f, $z_1, z_2 \in D$ $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_1) - F(z_2)$	
Теорема Коші	Якщо $f(z)$ аналітична в області D	
	D − однозв'язна і кусково-гладка замкнена крива $L \subset D$, то $\oint_L f(z)dz = 0$	D − багатозв'язна й обмежена кусково-гладкими кривими $L_0, L_1, ..., L_n$, то $\oint_{L_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{L_K} f(z)dz$
Формула Коші	Для аналітичної функції $f(z)$ $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{z - z_0}dz$, де точка z_0 перебуває всередині кривої L	Для похідної $f^{(n)}(z)$, $n \in \mathbf{N}$ $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz$, де точка z_0 перебуває всередині кривої L

3. Ряди аналітичних функцій

3.1. Степеневі ряди і ряди Лорана

Основне поняття	Означення
Степеневий ряд	$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k, \;\; c_k, z_0, z \in \mathbf{C}$
Радіус збіжності	$R = \dfrac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert c_n \rvert}}}$
Круг збіжності	$\lvert z - z_0 \rvert < R$
Ряд Тейлора	$\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$
Ряд Лорана	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ $c_n = \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{\lvert z-z_0 \rvert = \rho} \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \; n \in \mathbf{Z}, \; r < \rho < R$
Правильна частина ряду Лорана	$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$
Головна частина ряду Лорана	$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n$

Теорема Тейлора

Будь-яку функцію $f(z)$, аналітичну в крузі $\lvert z - z_0 \rvert < R$, $0 < R \le \infty$, можна розкласти в цьому крузі у збіжний до неї ряд Тейлора.

Теорема Лорана

Будь-яку функцію $f(z)$, аналітичну в кільці $r < \lvert z - z_0 \rvert < R$, $0 \le r < R \le \infty$, можна розкласти в цьому кільці у збіжний до неї ряд Лорана.

3.2. Розкладання деяких функцій у степеневий ряд в околі точки $z_0 = 0$

Розкладання	Область збіжності
$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$	$z \in \mathbf{C}$
$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$z \in \mathbf{C}$
$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$	$z \in \mathbf{C}$
$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$z \in \mathbf{C}$
$\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$	$z \in \mathbf{C}$
$\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1}$	$\lvert z \rvert < 1$
$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$	$\lvert z \rvert < 1$
$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$	$\lvert z \rvert < 1$

4. Ізольовані особливі точки. Лишки

4.1. Основні поняття

Основне поняття	Означення
Ізольована особлива точка	Точку z_0 називають ізольованою особливою точкою функції $f(z)$, якщо функція $f(z)$ аналітична в деякому околі цієї точки , за винятком самої точки z_0
Нуль функції	Точку z_0 називають нулем *n*-го порядку функції $f(z)$, якщо $f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0$
Лишок	Лишком аналітичної функції $f(z)$ в ізольованій точці z_0 називають комплексне число $\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\lvert z - z_0 \rvert = r} f(z)dz$ (у крузі $\lvert z - z_0 \rvert \le r$ немає інших особливих точок)

4.2. Класифікація ізольованих особливих точок функції

Тип точки	Границя функції $f(z)$ у точці z_0	Головна частина ряду Лорана функції $f(z)$
Усувна	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = C \neq \infty$	Відсутня
Полюс порядку $m \in \mathbf{N}$	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$	Містить скінченну кількість доданків $\sum\limits_{n=-m}^{-1} c_n (z-z_0)^n$, $c_{-m} \neq 0$
Істотно особлива точка	$\lim\limits_{z\to z_0} \mathrm{f}(\mathrm{z})$ не існує	Містить нескінченну кількість доданків $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n$

z_0 полюс порядку m функції $f(z)$ $\Longleftrightarrow$ z_0 нуль порядку m функції $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$

4.3.Обчислення лишку функції в ізольованих особливих точках

Точка	Лишок
z_0 **– скінченна точка**	res $f(z_0) = c_{-1}$
z_0 **– усувна точка**	res $f(z_0) = 0$
z_0 **– простий полюс** $(m=1)$	res $f(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0}((z-z_0)f(z))$
	Зокрема, якщо $f(z) = \varphi(z)/\psi(z)$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, $\varphi(z_0) \neq 0$, то res $f(z_0) = \varphi(z_0)/\psi'(z_0)$
z_0 **– полюс порядку** m	res $f(z_0) = \dfrac{1}{(m-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}((z-z_0)^m f(z))$
$z_0 = \infty$	res $f(z_0) = -c_{-1}$

4.4. Обчислення інтегралів за допомогою лишків

Теорема Коші про лишки

Якщо функція $f(z)$ аналітична на межі L області D і всередині неї, за винятком скінченної кількості особливих точок $z_1, z_2, ..., z_n$, то

$$\oint_L f(z) = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k).$$

Обчислення інтегралів від функції дійсної змінної

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx = \left| \begin{array}{c} e^{ix} = z, \quad dx = \dfrac{dz}{ix}, \\ \cos x = \dfrac{z^2+1}{2z}, \sin x = \dfrac{z^2-1}{2iz} \\ 0 \le x \le 2\pi, \quad |z| = 1 \end{array} \right| = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{z} =$$

$$= \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} R_1(z)dz = 2\pi \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} R_1(z_k).$$

У наведених нижче інтегралах підсумовування здійснюють за всіма особливими точками z_k $(k = 1,2,...,n)$ верхньої півплощини $(\operatorname{Im} z_k > 0)$.

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k)$.
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\alpha x) f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}(\exp(i\alpha z_k) f(z_k))$.
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\alpha x dx = \operatorname{Re}(2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}(\exp(i\alpha z_k) f(z_k))$.
4. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\alpha x dx = \operatorname{Im}(2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}(\exp(i\alpha z_k) f(z_k))$.

5. Завдання для самостійного виконання

1. Обчислити:

1. $(-\sqrt{6} + i\sqrt{2})^{10}$.

2. $(1+i)^{117}$.

3. $(\sqrt{18} - i\sqrt{6})^{11}$.

4. $(2-2i)^{14}$.

5. $(-\sqrt{15} - i\sqrt{5})^{111}$.

6. $(\sqrt{36} - 6i)^{210}$.

7. $(-\sqrt{121} + 11i)^{15}$.

8. $(1/\sqrt{3} - i/\sqrt{3})^{7}$.

9. $(12-12i)^{3}$.

10. $(-7i)^{21}$.

11. $(-\sqrt{6} + \sqrt{6}i)^{30}$.

12. $(-\sqrt{2} - 2i)^{11}$.

13. $(-3 + i\sqrt{3})^{4}$.

14. $(-\sqrt{9} - i\sqrt{3})^{54}$.

15. $(10-10i)^{48}$.

16. $(\sqrt{36} + 6i)^{120}$.

17. $(-\sqrt{121}-11i)^{13}$.

18. $(1/\sqrt{3}+i/\sqrt{3})^{17}$.

19. $(12-12i)^{33}$.

20. $(-7i)^{121}$.

2. Знайти всі розв'язки рівнянь:

1. $z^3+8i=0$.

2. $z^5+\sqrt{3}-i=0$.

3. $z^{11}+\sqrt{11}+11i=0$.

4. $z^{32}+80=0$.

5. $z^{54}+87i=0$.

6. $z^{48}-28i=0$.

7. $z^{13}-\sqrt{2}+\sqrt{2}i=0$.

8. $iz^{10}-8+8i=0$.

9. $z^{113}+16i-16=0$.

10. $z^{53}+i+1=0$.

11. $z^{21}+i=0$.

12. $iz^{62}+55=0$.

13. $z^{32}+\sqrt{6}+\sqrt{2}i=0$.

14. $z^{33}+\sqrt{2}-\sqrt{6}i=0$.

15. $iz^{22}+5=0$.

16. $z^{28}-8i=0$.

17. $z^{15}-\sqrt{2}-\sqrt{2}i=0$.

18. $iz^{11}+8+8i=0$.

19. $z^{32}+16i+16=0$.

20. $z^{39}-i-1=0$.

3. Перевірити на диференційовність функції:

1. $f(z)=e^{\overline{z}}$.

2. $f(z)=z\,\mathrm{Re}(z)$.

3. $f(z)=z\,|z|$.

4. $f(z)=z-|z|$.

5. $f(z)=e^{\overline{z}}+e^{z}$.

6. $f(z)=e^{\overline{z}}-e^{z}$.

7. $f(z)=\mathrm{Im}(z)\overline{z}$.

8. $f(z)=\mathrm{Im}(z)+i\,\mathrm{Re}(z)$.

9. $f(z)=\mathrm{Re}(z)-i\,\mathrm{Im}(z)$.

10. $f(z)=\mathrm{Re}(\overline{z})+\mathrm{Im}(z)$.

11. $f(z)=e^{\mathrm{Im}(z)}$.

12. $f(z)=\overline{z^2}$.

13. $f(z)=\mathrm{Im}(z)/|z|$.

14. $f(z)=2z+\overline{z}$.

15. $f(z)=\mathrm{Im}(z)-\mathrm{Re}(z)$.

16. $f(z)=\mathrm{Re}(z)+i\,\mathrm{Im}(z)$.

17. $f(z)=\mathrm{Re}(\overline{z})-\mathrm{Im}(z)$.

18. $f(z)=e^{\mathrm{Im}(z)}+z$.

19. $f(z)=z\,\mathrm{Im}(z)$.

20. $f(z)=z^2\,|z|$.

4. Розкласти функцію $f(z)$ у ряд Лорана у кільці.

1. $f(z)=z^2\sin\frac{\pi(z+1)}{z}$, $0<|z|<\infty$.

2. $f(z)=\frac{1}{z^2+4}$, $2\sqrt{2}<|z+2|<\infty$.

3. $f(z)=\sin\frac{z}{z+1}$, $0<|z+1|<\infty$.

4. $f(z)=\frac{1}{z^2-4}$, $2\sqrt{2}<|z-2i|<\infty$.

5. $f(z)=z^3\cos\frac{\pi(z+3)}{z}$, $0<|z|<\infty$.

6. $f(z)=\frac{1}{(z-2)^2(z+1)}$, $1<|z|<2$.

7. $f(z)=\frac{1}{(z^2-4)(z+2)}$, $2<|z|<\infty$.

8. $f(z)=\frac{1}{z^2(z+3)}$, $1<|z+1|<2$.

9. $f(z)=z^2e^{\frac{1}{z-1}}$, $0<|z-1|<\infty$.

10. $f(z)=\frac{1}{z(z^2-1)}$, $1<|z-1|<2$.

11. $f(z)=z^{-3}\sin\frac{\pi z-1}{z}$, $0<|z|<\infty$.

12. $f(z)=\frac{1}{z(z-1)(z-2)}$, $1<|z|<2$.

13. $f(z)=\frac{1}{z(z-1)(z-2)}$, $1<|z-2|<2$.

14. $f(z)=\frac{e^{\frac{1}{(z-1)^2}}}{(z-1)}$, $0<|z-1|<\infty$.

15. $f(z)=\frac{1}{(z-2)^3}$, $1<|z-1|<\infty$.

16. $f(z)=\cos\frac{z}{z+1}$, $0<|z+1|<\infty$.

17. $f(z)=\frac{1}{z^2-4}$, $2\sqrt{2}<|z+2i|<\infty$.

18. $f(z)=z^3\cos\frac{\pi(z-2)}{z}$, $0<|z|<\infty$.

19. $f(z)=z^{-3}\sin\frac{\pi(z+1)}{z}$, $0<|z|<\infty$.

20. $f(z)=\frac{1}{z(z+1)(z-2)}$, $1<|z|<2$.

5. Знайти особливі точки функції $f(z)$ і з'ясувати їх характер.

1. $f(z)=\frac{z}{1-\cos z}$.

2. $f(z)=\frac{z}{1+e^{z^2}}$.

3. $f(z)=\frac{1-\cos z}{\sin^2 z}$.

4. $f(z)=\frac{\cos(\pi/z)}{z-1}$.

5. $f(z)=\frac{e^{-\frac{1}{z^2}}}{z-1}$.

6. $f(z)=\frac{\operatorname{ctg} z}{z}$.

7. $f(z)=\frac{\operatorname{tg} z}{z}$.

8. $f(z)=\frac{1}{z^3(z^2+4)^4}$.

9. $f(z)=\frac{1}{z(2-\cos z)}$.

10. $f(z)=\frac{\operatorname{tg} z}{z^3}$.

11. $f(z)=\frac{e^{z-\frac{1}{z}}}{z-1^2}$.

12. $f(z)=\frac{z}{1+e^z}$.

13. $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z+1}$.

14. $f(z)=\dfrac{z}{e^z+2}$.

15. $f(z)=\dfrac{(z-1)^2}{(z+2)^3}$.

16. $f(z)=\dfrac{\operatorname{ctg} z}{z^2}$.

17. $f(z)=\dfrac{1}{z^3(z^2+9)^4}$.

18. $f(z)=\dfrac{1}{z(4-\sin z)}$.

19. $f(z)=\dfrac{1+\cos z}{\sin^2 z}$.

20. $f(z)=\dfrac{\cos(\pi/z)}{z+1}$.

6. Знайти лишки функції $f(z)$.

1. $f(z)=\operatorname{ctg}^2 z$.

2. $f(z)=\dfrac{e^z}{1-z^2}$.

3. $f(z)=\dfrac{\operatorname{tg} z}{z}$.

4. $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z+2)^2}$.

5. $f(z)=\dfrac{1}{z+1}\sin\dfrac{\pi z}{z+1}$.

6. $f(z)=\dfrac{\operatorname{ctg} z}{z}$.

7. $f(z)=ze^{\frac{z-1}{z+1}}$.

8. $f(z)=\dfrac{2z}{2-\cos z}$.

9. $f(z)=\dfrac{z}{e^z-2}$.

10. $f(z)=\dfrac{1}{(z^2-1)^2(z-1)}$.

11. $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+4)^2(z-2i)}$.

12. $f(z)=\dfrac{1}{(z^2-1)^2(z+1)}$.

13. $f(z)=\dfrac{z}{3-\sin z}$.

14. $f(z)=z^2\sin\dfrac{1}{z}$.

15. $f(z)=z^4e^{\frac{1}{z}}$.

16. $f(z)=\operatorname{tg}^2 z$.

17. $f(z)=\dfrac{e^z}{1+z^2}$.

18. $f(z)=\dfrac{2z}{2-\sin z}$.

19. $f(z)=\dfrac{z}{e^z+2}$.

20. $f(z)=\dfrac{1}{(z^2-1)^2(z+1)}$.

7. Обчислити $\int\limits_0^{2\pi} R(x)\,dx$**:**

1. $R(x)=\dfrac{1}{4+\cos x}$.

2. $R(x)=\dfrac{1}{(\sqrt{5}+\cos x)^2}$.

3. $R(x)=\dfrac{1}{(4+\cos x)^2}$.

4. $R(x)=\dfrac{1}{4\sin x+5}$.

5. $R(x)=\dfrac{1}{3-\sqrt{5}\sin x}$.

6. $R(x)=\dfrac{1}{(4+3\cos x)^2}$.

7. $R(x)=\dfrac{1}{\sin x+2}$.

8. $R(x)=\dfrac{1}{5+3\cos x}$.

9. $R(x)=\dfrac{1}{13+12\sin x}$.

10. $R(x)=\dfrac{1}{7+\sin x}$.

11. $R(x)=\dfrac{1}{(11+\sin x)^2}$.

12. $R(x)=\dfrac{\sin x}{(4+\cos x)^2}$.

13. $R(x)=\dfrac{\cos x}{5+3\sin x}$.

14. $R(x)=\dfrac{1}{\sin x+\sqrt{2}}$.

15. $R(x)=\dfrac{\sin x}{(5-4\cos x)^2}$.

16. $R(x)=\dfrac{1}{(4+3\sin x)^2}$.

17. $R(x)=\dfrac{1}{\cos x+2}$.

18. $R(x)=\dfrac{1}{5+3\sin x}$.

19. $R(x)=\dfrac{1}{13+12\cos x}$.

20. $R(x)=\dfrac{1}{5+3\cos x}$.

8. Обчислити $\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx$**:**

1. $R(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$.

2. $R(x)=\dfrac{x^2+1}{(x^2+4x+13)^2}$.

3. $R(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+10)}$.

4. $R(x)=\dfrac{1}{(x^2+2)(x^2+4)}$.

5. $R(x)=\dfrac{1}{(x^2+4)^2}$.

6. $R(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+9)}$.

7. $R(x)=\dfrac{1}{(x^2+2x+2)^2}$.

8. $R(x)=\dfrac{x^2+1}{x^4+4}$.

9. $R(x)=\dfrac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)}$.

10. $R(x)=\dfrac{1}{x^2-2ix-2}$.

11. $R(x)=\dfrac{1}{x^2+4ix-5}$.

12. $R(x)=\dfrac{1}{x^4+8x^2+16}$.

13. $R(x)=\dfrac{x^2}{x^4+8x^2+16}$.

14. $R(x)=\dfrac{x^2}{x^4+5x^2+4}$.

15. $R(x)=\dfrac{1}{x^2+2ix-2}$.

16. $R(x)=\dfrac{1}{(x^2+4)(x^2+9)}$.

17. $R(x)=\dfrac{1}{(x^2+2)(x^2+16)}$.

18. $R(x)=\dfrac{1}{(x^2+9)^2}$.

19. $R(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+16)}$.

20. $R(x)=\dfrac{1}{(x^2-2x+2)^2}$.

9. Обчислити $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}R(x)\,dx$**:**

1. $\alpha=1$, $R(x)=\dfrac{x-1}{x^2-2x+2}$.

2. $\alpha=1$, $R(x)=\dfrac{1}{x^2-2ix-2}$.

3. $\alpha=1$, $R(x)=\dfrac{1}{x^2+4ix-5}$.

4. $\alpha=1$, $R(x)=\dfrac{x-3}{x^2-6x+109}$.

5. $\alpha=-3$, $R(x)=\dfrac{x+1}{x^2-2x+5}$.

6. $\alpha=-1$, $R(x)=\dfrac{1}{x^4+8x^2+16}$.

7. $\alpha=1$, $R(x)=\dfrac{x}{(x^2+4)^2}$.

8. $\alpha=2$, $R(x)=\dfrac{x}{(x^2+1)^2}$.

9. $\alpha=1$, $R(x)=\dfrac{x-1}{(x^2+9)^2}$.

10. $\alpha=2$, $R(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x+2}$.

11. $\alpha=1$, $R(x)=\dfrac{x}{x^2-2x+17}$.

12. $\alpha=2$, $R(x)=\dfrac{x-1}{x^2-4x+5}$.

13. $\alpha=1$, $R(x)=\dfrac{x}{x^2+2x+10}$.

14. $\alpha=1$, $R(x)=\dfrac{x}{x^2-2x+10}$.

15. $\alpha=3$, $R(x)=\dfrac{x}{x^2+4x+20}$.

16. $\alpha=2$, $R(x)=\dfrac{x}{x^2+2x+10}$.

17. $\alpha=1$, $R(x)=\dfrac{x-1}{(x^2+16)^2}$.

18. $\alpha=3$, $R(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x+2}$.

19. $\alpha=1$, $R(x)=\dfrac{x}{x^2-2x+2}$.

20. $\alpha=2$, $R(x)=\dfrac{x-1}{x^2-2x+5}$.

10. Обчислити інтеграли $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cos\alpha x\,R(x)\,dx$ **і** $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin\alpha x\,R(x)\,dx$**:**

1. $\alpha=2$, $R(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$.

2. $\alpha=1$, $R(x)=\dfrac{x}{x^2-2x+17}$.

3. $\alpha=2$, $R(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x+2}$.

4. $\alpha=5$, $R(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$.

5. $\alpha=3$, $R(x)=\dfrac{x+1}{x^2-2x+5}$.

6. $\alpha=4$, $R(x)=\dfrac{x+1}{x^2+4ix-5}$.

7. $\alpha=8$, $R(x)=\dfrac{1}{x^2-2ix-2}$.

8. $\alpha=1$, $R(x)=\dfrac{x}{x^2-2x+10}$.

9. $\alpha=1$, $R(x)=\dfrac{x}{x^2+4x+20}$.

10. $\alpha=2$, $R(x)=\dfrac{1}{x^2+16}$.

11. $\alpha = 3$, $R(x) = \dfrac{x}{x^4 + 4}$.

12. $\alpha = 2$, $R(x) = \dfrac{x+1}{x^2 + 2x + 2}$.

13. $\alpha = 2$, $R(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - 4x + 5}$.

14. $\alpha = 5$, $R(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2x + 10}$.

15. $\alpha = 4$, $R(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2x + 10}$.

16. $\alpha = 2$, $R(x) = \dfrac{x}{x^2 + 25}$.

17. $\alpha = 2$, $R(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 2x + 2}$.

18. $\alpha = 3$, $R(x) = \dfrac{1}{(x^2 + 4)^2}$.

19. $\alpha = 3$, $R(x) = \dfrac{x-1}{x^2 + 4ix - 5}$.

20. $\alpha = 2$, $R(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2ix - 2}$.

Список рекомендованої літератури

Вища математика [Текст] : довідник / І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова. – К. : НТУУ «КПІ», 2011. – 212 с.

Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного [Текст] / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – 4-е изд., испр. – М. : Наука, 1973. – 736 с.

Маркушевич, А. И. Краткий курс теории аналитических функций [Текст] / А. И. Маркушевич. –3-е изд., испр. и доп. – М. : Наука, 1966. – 388 с.

Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного [Текст] / И. И. Привалов. – 11-е изд. – М. : Наука, 1967. – 444 с.

Зміст

1. Комплексні числа й дії над ними 3
   1.1. Поняття комплексного числа 3
   1.2. Форми запису і дії над комплексними числами 4
2. Функції комплексної змінної 4
   2.1. Деякі елементарні функції комплексної змінної 4
   2.2. Диференціювання функцій комплексної змінної 5
   2.3. Інтегрування функцій комплексної змінної 6
3. Ряди аналітичних функцій 7
   3.1. Степеневі ряди і ряди Лорана 7
   3.2. Розкладання деяких функцій у степеневий ряд в околі точки $z_0 = 0$ 8
4. Ізольовані особливі точки. Лишки. 8
   4.1. Основні поняття 8
   4.2. Класифікація ізольованих особливих точок функції 9
   4.3.Обчислення лишку функції в ізольованих особливих точках 9
   4.4. Обчислення інтегралів за допомогою лишків 9
5. Завдання для самостійного виконання 10
   Список рекомендованої літератури 16